1

سلم تصحيح مادة نظرية الحلقات _سنة ثانية.

الجواب الأول.

1- إن العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}_{10}$ هي $1, 3, 7, 9$.

حيث $k \in \mathbb{Z}_{10}$.

$\gcd(10,k)=1 \Rightarrow$ k قابل للقلب

$\gcd(10,k)=d>1 \Rightarrow$ k قاسم للصفر

إن العناصر القاسمة للصفر في $\mathbb{Z}_{10}$ هي $2, 4, 5, 6, 8$.

إن العناصر الجامدة في $\mathbb{Z}_{10}$ هي $0, 1, 5, 6$

$0^2=0$
$1^2=1$
$5^2=5$
$6^2=6$

إن العناصر عديمة القوى في $\mathbb{Z}_{10}$ هي 0 فقط.

2-

.	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	2
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

$\longrightarrow$

$2.8=6$
$4.4=6$
$6.6=6$

إن 6 هو عنصر حيادي في الحلقة R . كما أن الحلقة R تبديلية.

كما أن كل عنصر في R هو عنصر قابل للقلب أو لا يوجد $a, b \in R$ ، $a,b \neq 0$ حيث $ab=0$.

إذن الحلقة R لا تحوي قواسم للصفر ومنه R منطقة تكاملية منتهية فهي حقل.

الجواب الثاني.

1- إن $A+B=\{a+b \,;\, a\in A, b\in B\}$ ، وبما أن A, B مثاليين يساريين في R

فإن كلاً من A, B مجموعة غير خالية ومنه فإن $A+B$ مجموعة غير خالية

لتكن $x, y \in A+B$ عندئذ $x=a+b, y=a'+b'$ حيث $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$

ومنه $x-y=(a+b)-(a'+b')=(a-a')+(b-b') \in A+B$.

من جهة أخرى إذا كان $r \in R$ فإن $rx=r(a+b)=ra+rb \in A+B$. وهذا يبين أن

المجموعة $A+B$ هي مثالي يساري في R .

بما أن A, B هي زمر جزئية من الزمرة $(R, +)$ فإن $A \cap B$ هو زمرة جزئية من $(R, +)$.

كما أن أياً كان $r \in R$ وأياً كان $x \in A \cap B$ عندئذ: $x \in A$ و $x \in B$

ولما كان A و B مثاليين يساريين في R نجد أن $rx \in A$

و $rx \in B$ ومنه

$rx \in A \cap B$.

مما سبق نجد أن $A \cap B$ مثالي يساري في R.

الجواب الثالث.

- بما أن $f: R \longrightarrow S$ تشاكل حلقي فإنه حسب مبرهنة تنص ($\ker(f)$ هو مثالي في R) فإن $\ker f$ مثالي في R وبالتالي $R/_{\ker f}$ حلقة.

لنعرف العلاقة $\varphi: R/_{\ker f} \longrightarrow \operatorname{Im} f$ بالشكل التالي:

أياً كان $x + \ker f \in R/_{\ker f}$ فإن $\varphi(x + \ker f) = f(x)$. منبين أن العلاقة φ معرفة جيداً (تطبيق) وذلك لأنه أياً كان $x + \ker f, y + \ker f \in R/_{\ker f}$

بحيث $x + \ker f = y + \ker f$ فإن $(x-y) + \ker f = \ker f$ ومنه $x - y \in \ker f$

أي أن $f(x-y) = 0$ ومنه $f(x) = f(y)$. كذلك فإن التطبيق φ هو تشاكل لأن:

1) $\varphi[(x + \ker f) + (y + \ker f)] = \varphi((x+y) + \ker f) = f(x+y)$

$= f(x) + f(y) = \varphi(x + \ker f) + \varphi(y + \ker f)$.

2) $\varphi((x + \ker f).(y + \ker f)) = \varphi((x.y) + \ker f) = f(x.y) = f(x).f(y)$

$= \varphi(x + \ker f).\varphi(y + \ker f)$

مما سبق نجد أن التطبيق φ هو تشاكل حلقي. كما أن التطبيق φ غامر، لأنه أياً كان $z \in \operatorname{Im} f$ يوجد $a \in R$ بحيث $z = f(a)$ ومنه $a + \ker f \in R/_{\ker f}$ وأن

$\varphi(a + \ker f) = f(a) = z$.

ومنه فإن التشاكل φ متباين، لأنه إذا كان $a+\ker f,\ b+\ker f \in R/\ker f$ بحيث

$\varphi(a+\ker f)=\varphi(b+\ker f)$ فإن $f(a)=f(b)$ ومنه $f(a-b)=0$ أي أن

$a-b\in\ker f$ وبالتالي يكون $(a-b)+\ker f=\ker f$ ومنه

$$a+\ker f=b+\ker f$$

ومنه نعتبر أن φ هو تماثل وبالتالي $R/\ker f \cong \mathrm{Im} f$.

الجواب الرابع.

1- ليكن $a\in J(\mathbb{Z})$ عندئذ يكون العنصر $1-a$ قابل للقلب في $\mathbb{Z}$ ومنه إما $1-a=1$ أو $1-a=-1$

* إذا كان $1-a=1$ عندئذ يكون $a=0$.
* لنفرض أن $1-a=-1$ عندئذ يكون $a=2$ ولما كان العدد $a=2$ أولياً في $\mathbb{Z}$ فإن المثالي $2\mathbb{Z}$ هو مثالي أعظمي في $\mathbb{Z}$ ولما كان $3\notin 2\mathbb{Z}$

حيث $3\mathbb{Z}$ ، $2\mathbb{Z}$ هي مثاليات أعظمية في R وأن $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$ لأن $3\mathbb{Z}\subsetneq 2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$

ومنه $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.

ولما كان $2=a\in J(\mathbb{Z})$ فإن المثالي $2\mathbb{Z}$ صغير في $\mathbb{Z}$ ومنه $\mathbb{Z}=3\mathbb{Z}$ وهذا غير ممكن

مما يعني أن $J(\mathbb{Z})=0$.

2-

$$6\mathbb{Z}\cap 8\mathbb{Z}=24\mathbb{Z}$$
$$6\mathbb{Z}+8\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$$

$$(6\mathbb{Z}:8\mathbb{Z})=\{x : x\in\mathbb{Z};\ x.8\mathbb{Z}\subseteq 6\mathbb{Z}\}.$$

$\boxed{0}\ 8\mathbb{Z}=\{0\}\subset 6\mathbb{Z}$

$\mp 1.8\mathbb{Z}=8\mathbb{Z}\not\subset 6\mathbb{Z}.$

$\mp 2.8\mathbb{Z}=16\mathbb{Z}\not\subset 6\mathbb{Z}.$

$\boxed{\mp 3}.8\mathbb{Z}=24\mathbb{Z}\subset 6\mathbb{Z}.$

$\mp 4.8\mathbb{Z}=32\mathbb{Z}\not\subset 6\mathbb{Z}$

ومنه فإن $(6\mathbb{Z}:8\mathbb{Z})=\{0,\mp 3,\mp 6,\ldots\}=3\mathbb{Z}$

مسائل تصحيح الحلقات [illegible]

3-

$3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0+12\mathbb{Z},\ 3+12\mathbb{Z},\ 6+12\mathbb{Z},\ 9+12\mathbb{Z}\}.$

إن الحلقة $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ واحدية، وواحد الحلقة هو $9+12\mathbb{Z}$.

$1\cdot(9+12\mathbb{Z}) = 9+12\mathbb{Z} \neq 0+12\mathbb{Z}.$

$2\cdot(9+12\mathbb{Z}) = 6+12\mathbb{Z} \neq 0+12\mathbb{Z}.$

$3\cdot(9+12\mathbb{Z}) = 3+12\mathbb{Z} \neq 0+12\mathbb{Z}.$

$\underline{4}\cdot(9+12\mathbb{Z}) = 0+12\mathbb{Z}$

إذن فإن مميز الحلقة $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ هو $\underline{4}$.